

Ein Approximationsverfahren für die Feldtheorie in funktionaler Formulierung

Dieter Maison

München

1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554023_0099

Ein Approximationsverfahren für die Feldtheorie

in funktionaler Formulierung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Dieter Maisen

München

1967



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Stumpf

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 20.12.1967

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Mathematische Vorbemerkungen	V 1 - V 3
Einleitung	1 - 6
I. Quantenmechanik	
1. Mathematische Problemstellung	6 - 9
2. Die NTD-Methode	9 - 12
3. Die Entwicklung nach einem ONS	12 - 15
II. Feldtheorie, einzeitige Formulierung	
4. Mathematische Problemstellung	15 - 23
5. Die Entwicklung nach einem ONS in $L^2(H, \mathcal{G}f)$	23 - 28
III. Mehrzeitige Formulierung	
6. Die Reihenentwicklung	28 - 33
7. Mehrzeitige Behandlung des anharmonischen Oszillators	34 - 36
8. Schlußbemerkung	36 - 37
Anhang 1	38
Anhang 2	39 - 40
Literaturverzeichnis	41 - 42

Mathematische Vorbemerkungen

1. Funktionalanalysis ²²⁾.

Sei H ein Hilbertraum, dann nennen wir ein System $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Elementen von H vollständig, wenn die lineare Hülle von $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ dicht liegt in H bezüglich der starken Topologie, d.h. zu jedem $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele $c_i(x, \varepsilon) \in \mathbb{C}$, so daß

$$\|x - \sum_{i=1}^n c_i(x, \varepsilon) e_i\| < \varepsilon \quad \text{gilt.}$$

Ein vollständiges System heißt Basis für H , wenn es zu jedem $x \in H$ Zahlen $c_i \in \mathbb{C}$ gibt, so daß gilt

$$x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i e_i =: \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

(s bedeutet in der starken Topologie).

Nicht jedes vollständige System ist eine Basis, auch dann nicht, wenn je endlich viele der e_i linear unabhängig sind.

Seien A und B Operatoren in H mit den Definitionsbereichen $D(A)$ bzw. $D(B)$ und es gelte $D(A) \subseteq D(B)$ und die Einschränkung von B auf $D(A)$ stimme mit A überein, dann schreiben wir $A \subseteq B$. Zwei unbeschränkte Operatoren in H heißen gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Ein Operator A heißt selbstadjungiert (s.a.), wenn $D(A)$ dicht liegt in H und $A = A^*$ gilt. A heißt wesentlich s.a. auf $D(A)$, wenn $D(A)$ dicht liegt in H und $A^* = A^{**}$ ist. Ein Vektor $x \in H$ heißt analytisch für A , wenn $x \in D(A^n)$ für alle $n \geq 1$ und $a(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n x\| t^n$ eine analytische Funktion bei $t = 0$ ist. Es gilt folgendes Kriterium (Nelson ²¹⁾):

A ist wesentlich s.a. auf $D(A)$, wenn es ein in $D(A)$ dichtes System von analytischen Vektoren für A gibt und $D(A)$ dicht liegt in H .

2. Wahrscheinlichkeitstheorie ²³⁾.

Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen einer Menge M heißt ein

Boolescher Ring, wenn gilt:

$$(R_1) \quad A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$$

$$(R_2) \quad M \in \mathcal{R}$$

$$(R_3) \quad A \in \mathcal{R} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{R} \quad (\bar{A} \text{ bezeichnet das Komplement von } A \text{ bezüglich } M)$$

Ein Boolescher Ring $\mathcal{R}$ heißt ein σ -Ring, wenn für jede Folge

$$(A_i \in \mathcal{R}), \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \quad \text{auch} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R} \quad \text{ist.}$$

Eine auf einem σ -Ring definierte, nichtnegative, reelle Funktion μ heißt Maß auf $\mathcal{R}$, wenn sie noch zusätzlich σ -additiv (totaladditiv) ist, d.h.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

für wechselweitig disjunkte $A_i \in \mathcal{R}$.

Ein Tripel $(M, \mathcal{R}, \mu)$ aus einer Menge M , einem σ -Ring $\mathcal{R}$ von Teilmengen von M und einem Maß μ auf $\mathcal{R}$ heißt ein Maßraum. Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ heißt $\mathcal{R}$ -meßbar ^{x)}, falls für $\forall y \in \mathbb{R}^1: \{x \in M: f(x) \leq y\} \in \mathcal{R}$ ist. Jedes Maß μ definiert ein Integral für meßbare Funktionen auf M auf folgende Weise:

Sei $\{z_v^{(k)}\}_{v=1}^{\infty}$ eine Zerlegung des $\mathbb{R}^1$ in disjunkte halboffene Intervalle $I_v^{(k)} = (z_{v-1}^{(k)}, z_v^{(k)}]$, deren Länge ℓ_k nicht überschreitet.

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ $\mathcal{R}$ -meßbar, dann heißt

$$\int_M f(x) d\mu(x) := \lim_{\ell_k \rightarrow 0} \sum_{v=1}^{\infty} z_v^{(k)} \mu(\{x \in M: f(x) \in I_v^{(k)}\})$$

das μ -Integral von f , falls der Grenzwert existiert.

x) genauer wäre $\mathcal{R}$ -Borel-meßbar.

Ein Maßraum $(M, \mathcal{T}, p)$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsfeld, falls $p(M) = 1$ ist. Unter einer Zufallsgröße auf $(M, \mathcal{T}, p)$ verstehen wir eine $\mathcal{T}$ -meßbare, reelle Funktion f auf M . Die Funktion $F_f(y) := p(\{x \in M: f(x) \leq y\})$ heißt die Verteilungsfunktion von f . Die Ableitung $\frac{dF_f(y)}{dy}$ heißt, falls sie existiert, die Wahrscheinlichkeitsdichte von f . Das Integral $\int_M f(x) dp(x)$ (falls existent) heißt der Erwartungswert von f (bezüglich p) und wird mit $E_p(f)$ bezeichnet. Die Zahlen $\mu_p^{(n)}(f) := \int f(x)^n dp(x)$ ($n \geq 0$) heißen die Momente von f (bezgl. p) (falls existent). Die Funktion von t

$$E_p(e^{itf}) = \int_M e^{itf(x)} dp(x) \quad \text{heißt die } \underline{\text{charakteristische}}$$

Funktion der Verteilung von f . Unter einem stochastischen Prozeß verstehen wir eine Familie von Zufallsgrößen $\{f_t: t \in T\}$ mit einer beliebigen Indexmenge T .

Einleitung

In einer Quantentheorie finden sich verschiedene mathematische Strukturen: die Observablen bilden eine Algebra $\mathcal{Q}$, der man üblicherweise noch eine (oder mehrere) Topologie(n) aufprägt; die statistische Interpretation führt zur Einführung von Wahrscheinlichkeitsfeldern (Maßräumen), deren Verteilungen (Maße) man positive lineare Funktionale (die sog. Zustände) auf der Algebra der Observablen zuordnet. Hinzu kommen bestimmte Transformationsgruppen, die als Automorphismen der beiden erstgenannten Strukturen dargestellt werden. Dazu gehört insbesondere die zeitliche Veränderung eines quantenmechanischen Systems. Mit der Kenntnis der Darstellung dieser Gruppen liegt also auch die Dynamik des Systems fest. Eine besondere Vereinfachung ergibt sich aus der Annahme, daß die Algebra der Observablen von wenigen Elementen, den sog. kanonischen Variablen $\{q_i, p_i\}$ erzeugt wird^{x)}. In der Feldtheorie entspricht diese Annahme der, daß alle Observablen als Funktionen weniger Felder ausgedrückt werden können. In der gewöhnlichen Quantenmechanik genügen bereits die kanonischen Variablen zu einem festen Zeitpunkt, um die ganze Algebra $\mathcal{Q}$ zu erzeugen. In einer Feldtheorie mit Wechselwirkung scheinen Modelluntersuchungen zu zeigen, daß man die Feldoperatoren in einer ganzen "Zeitschicht", also einer offenen Menge des $\mathbb{R}^4$, benötigt. Ein Zustand $|a\rangle$ ordnet nun jeder Observablen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bzw. jeder kontinuierlichen Schar von Observablen einen stochastischen Prozeß zu. Wird die Algebra $\mathcal{Q}$ von den kanonischen Variablen $\{q_i, p_i\}$ bzw. von den Feldern $\{\varphi_i(x)\}$ erzeugt, so genügt es offenbar, die Verteilung dieser Größen zu kennen, um alle Arten von statistischen

x) Die kanonischen Variablen selbst sind i.A. keine Elemente der Algebra $\mathcal{Q}$, sondern nur ihre "endliche Abschnitte" (z.B. Spektralscharen).

Aussagen über Observable machen zu können. Dazu benötigt man insbesondere die Momente der Verteilungen der $\{q_i, p_i\}$ bzw. die Korrelationsfunktionen^{x)} der den $\varphi_i(x)$ zugeordneten stochastischen Prozesse. Diese lassen sich am einfachsten durch die sog. charakteristische Funktion bzw. das charakteristische Funktional, das ist der Erwartungswert $E_a(e^{ixq})$ bzw. $E_a(e^{i\int \varphi(x) dx})$ beschreiben. Die Momente $\mu_a^{(n)}$ ergeben sich aus der charakteristischen Funktion durch Entwicklung in eine Taylorreihe:

$$\mu_a^{(n)} = E_a(q^n) = i^{-n} \frac{d^n}{dx^n} E_a(e^{ixq}) \Big|_{x=0}$$

Im Unterschied zur klassischen statistischen Mechanik, die bis hierher dieselbe mathematische Struktur aufweist, treten in der Quantentheorie Schwierigkeiten durch die Existenz nicht gleichzeitig beobachtbarer Observabler (z.B. q und p) auf, die nicht-kommutierenden Elementen der Algebra $\mathcal{Q}$ entsprechen. Berechnet man etwa für den harmonischen Oszillator in der Schrödingerdarstellung die gemeinsame charakteristische Funktion von q und p :

$S_a(x, y) = \langle a | e^{ixq + iy p} | a \rangle$, so sieht man, daß die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht mehr notwendig positiv definit ist, nur ihre Vergrößerung über hinreichend große Gebiete des Phasenraums, insbesondere die Marginalverteilungen bezüglich q bzw. p sind wieder positiv definit⁴⁾. Dieselbe Schwierigkeit tritt auf, wenn man den stochastischen Prozeß $q(t)$ bzw.

$\varphi(x)$ betrachtet, da $[q(t_1), q(t_2)] \neq 0$ bzw. $[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] \neq 0$ gilt. Obwohl man damit den Rahmen der üblichen Wahrscheinlichkeitstheorie verläßt, bleiben die charakterischen Funktionen bzw. Funktionale zur Beschreibung

x) Die Korrelationsfunktionen werden für die Feldtheorie als Distributionen angenommen 3).

xx) $\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) dx$ mit einer geeigneten "Testfunktion" $f(x)$

quantenmechanischer Systeme als erzeugende Funktionen der Momente bzw. Korrelationsfunktionen ^{x)} von Bedeutung. Die Dynamik eines Systems wird in der gewöhnlichen Quantenmechanik durch die Vorgabe der Energie als Funktion der kanonischen Variablen $\{q_i, p_i\}$ bzw. eine Bewegungsgleichung für die kanonischen Koordinaten $q_i(t)$ festgelegt. Diese Information kann zur Ableitung einer Bewegungsgleichung für $S_\alpha(x, y, t) = E_\alpha(e^{ixq(t) + iyp(t)})$ benützt werden, die genau der Fouriertransformierten der Liouvilleschen Gleichung der statistischen Mechanik entspricht ⁴⁾. Ist die Energie ein Polynom in den kanonischen Variablen $\{q_i, p_i\}$, so ergibt sich eine partielle Differentialgleichung für $S_\alpha(x, y, t)$. Ergänzt man diese Gleichung durch geeignete Rand- bzw. Anfangsbedingungen, so wird dadurch das quantenmechanische System vollkommen bestimmt (Kap. I). Eine konsequente Verallgemeinerung dieses Verfahrens auf die Feldtheorie (Kap. II) führt auf eine Funktionaldifferentialgleichung ⁵⁾ für das erzeugende Funktional ^{xx)}

$S_\alpha(f, g, t) := E_\alpha(e^{i\varphi_t(f) + i\pi_t(g)})$. Diese einzeitige Formulierung ist mehr für nichtrelativistische Probleme (z.B. für die Vielteilchenphysik) geeignet, da die explizite Lorentzkovarianz fehlt. Man kann jedoch an Stelle von $S_\alpha(f, g, t)$ das erzeugende Funktional der zeitgeordneten Produkte

$$T_\alpha(f) := E_\alpha(Te^{i\varphi(f)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} E_\alpha(\int T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) f(x_1) \dots f(x_n) d^n x)$$

betrachten, für das man im Falle einer lokalen Feldgleichung wieder eine Funktionaldifferentialgleichung ableiten kann. Die Verwendung einer lokalen Feldgleichung führt jedoch im kanonischen Formalismus auf die bekannten Divergenzschwierigkeiten ^{xxx)}, die damit zusammenhängen, daß die

x) Hierzu gehören insbesondere die Wightman-Funktionen.

xx) $\varphi_t(f) = \int \varphi(\vec{x}, t) f(\vec{x}) d^3x$ entsprechend für den kanonisch konjugierten Impuls π

xxx) siehe z.B. 6).

Korrelationsfunktionen Distributionen sind, die nicht für gleiche Koordinaten erklärt sind. Die Gleichsetzung von Koordinaten wird aber nötig, wenn wir eine nichtlineare, lokale Feldgleichung verwenden wollen. Zwei Auswege bieten sich an: Man setzt die Wechselwirkung nichtlokal an, indem man einen Formfaktor einführt (darunter fällt auch die Einführung eines Cut-offs im Impulsraum), den man nach durchgeführter Berechnung der Korrelationsfunktion bzw. des Energie- oder Massenspektrums wieder auf einen Punkt zusammenzieht. Ob dieser Weg möglich ist, kann nur durch genaue Analyse der auftretenden Gleichungssysteme entschieden werden. Verschmiert man die Wechselwirkung nur räumlich, so bleibt der einzeitige Formalismus für $S_\alpha(f,g,t)$ anwendbar, allerdings ist es fraglich, ob die Korrelationsfunktionen für gleiche Zeiten sinnvoll definierbar sind (z.B. beim freien Feld ist das der Fall). Will man jedoch die Wechselwirkung auch zeitlich ausschmieren, so ergibt sich weder für $S_\alpha(f,g,t)$ noch für $T_\alpha(f)$ eine einfache Funktionaldifferentialgleichung. So verbleibt für den mehrzeitigen Formalismus mit $T_\alpha(f)$ nur die Möglichkeit einer lokalen Feldgleichung, was nur dadurch möglich ist - das ist der zweite, der oben erwähnten zwei Auswege - , daß man die Korrelationsfunktionen als hinreichend regularisierte Distributionen annimmt. Die Folgen dieser Annahme (z.B. in Form einer indefiniten Metrik im Zustandsraum) sind vorerst noch nicht geklärt ⁷⁾.

Für die approximative Lösung der Gleichungen für $S_\alpha(f,g,t)$ bzw. $T_\alpha(f)$ ist es wichtig, eine Topologie in der Menge der zulässigen Approximationslösungen einzuführen, damit Konvergenzfragen untersucht werden können. In der gewöhnlichen Quantenmechanik geschieht das durch die Einführung einer Randbedingung für $S_\alpha(x,y,t) : \int |S_\alpha(x,y,t)|^2 dx dy < \infty$. Überträgt man diese Randbedingung auf das Funktional $S_\alpha(f,g,t)$, so wird man auf das Hilbertraumintegral von Friedrichs und Shapiro ⁸⁾ geführt. Fordert man die

Quadratintegrabilität von $S_a(f, g, t)$ bezüglich dieses Integrals, kann man für das freie Feld sofort die Selbstadjungiertheit des Funktionaldifferentialoperators in der Gleichung für $S_a(f, g, t)$ zeigen (Anhang 2). Im Falle einer skalaren φ^4 -Theorie mit verschmierter Wechselwirkung scheint eine entsprechende Aussage beweisbar zu sein. Für $T_a(f)$ läßt sich keine solche Randbedingung angeben.

Zur approximativen Lösung der Gleichung für S_a bzw. T_a wurde bisher hauptsächlich die sog. Neue-Tamm-Dancoff-Methode (NTD-Methode) verwendet⁹⁾. Diese besteht darin, das aus der Funktionaldifferentialgleichung resultierende unendliche Gleichungssystem für die Korrelationsfunktionen abzurechnen. Modelluntersuchungen am anharmonischen Oszillator zeigen jedoch, daß nicht einmal in diesem trivialen Fall eine befriedigende "numerische Konvergenz" vorliegt. Wir werden deshalb ein anderes Verfahren angeben, das eine Modifikation der NTD-Methode in funktionaler Form darstellt und zumindest im Falle des anharmonischen Oszillators befriedigende Ergebnisse liefert. Dieses Verfahren läßt sich auf die Feldtheorie übertragen (Kap. II), allerdings können wir aus folgenden Gründen keinen Konvergenzbeweis liefern: im einzeitigen Fall berechnet man das Energiespektrum, das abgesehen vom Grundzustand kontinuierlich ist, so daß die "Eigenfunktionen" nicht im Hilbertraum liegen; im mehrzeitigen, kovarianten Fall berechnet man zwar das Massenspektrum, das diskrete Zustände enthält, aber die für unseren Formalismus nötige Randbedingung ist nicht erfüllt, so daß die mathematische Grundlage fehlt. In Kap. III wird das angegebene Verfahren in der mehrzeitigen Form am anharmonischen Oszillator getestet, wo sich ganz brauchbare Energieeigenwerte ergeben. Schließlich sei vermerkt, daß unsere Approximationsmethode nicht auf den quantenmechanischen Fall beschränkt ist, sondern auch für eine klassische statistische Feldtheorie anwendbar ist. Ein ganz ähnliches Verfahren wurde von N. Wiener²⁴⁾ für klassische stochastische Prozesse vorgeschlagen

allerdings mit dem Unterschied, daß nicht das charakteristische Funktional, sondern die Zufallsgröße selbst in eine Reihe entwickelt wird. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß es nichtlineare Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten ergibt, hat aber den Vorteil, daß die Näherungslösungen immer Korrelationsfunktionen zu einem entsprechenden stochastischen Prozeß sind. Das Wiener'sche Verfahren wurde in der Turbulenztheorie angewendet²⁵⁾.

I. Quantenmechanik

1. Mathematische Problemstellung.

Wir betrachten zuerst ein quantenmechanisches System, das durch ein Paar kanonisch konjugierter Variable $\{q(t), p(t)\}$ beschrieben wird. Beide seien für festes t selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum Z , dem Zustandsraum, mit $[q(t), p(t)] \subseteq i1$. Zu zwei Zuständen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ aus Z definieren wir die charakteristische Funktion

$$S_{ab}(x, y, t) := \langle a | e^{ixq(t) + iy p(t)} | b \rangle \quad (1.1)$$

$S_{ab}(x, y, t)$ ist die erzeugende Funktion der Momente

$$S_{ab}^t(m, n) := \langle a | \text{Sym}(q^m(t) p^n(t)) | b \rangle$$

(Sym bedeutet symmetrisiert in q und p , also z.B.

$\text{Sym}(q^2 p) = \frac{1}{3}(q^2 p + qpq + pq^2)$, d.h.

$$S_{ab}(x, y, t) = \sum_{m, n \geq 0} \frac{i^m y^n}{m! n!} S_{ab}^t(m, n) x^m y^n \quad (1.2)$$

Die Dynamik des Systems werde durch einen positiv-definiten, wesentlich s.a. Hamiltonoperator $H(p, q)$ bestimmt. Die zeitliche Veränderung von $S_{ab}(x, y, t)$ wird dann durch die Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} S_{ab}(x, y, t) = \langle a | [H, e^{ixq(t) + iy p(t)}] | b \rangle \quad (1.3)$$

gegeben. Nehmen wir weiterhin an, daß H ein Polynom in p und q ist (nur dieser Fall ist hier von Interesse), so läßt sich die rechte Seite von (1.3) gliedweise berechnen ¹⁴⁾ und führt zu ⁴⁾⁵⁾:

$$i \frac{\partial}{\partial t} S_{ab}(x, y, t) = \left\{ H\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} y, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} x\right) - H\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} y, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} x\right) \right\} \quad (1.4)$$

wobei wir uns an die in $H(p, q)$ festgelegte Reihenfolge von p und q halten.

Ist H von der Form $H = \frac{1}{2} p^2 + V(q)$

so ergibt sich insbesondere

$$i \frac{\partial}{\partial t} S = \left\{ \frac{1}{i} x \frac{\partial}{\partial y} + V\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\right) - V\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\right) \right\} S = W S$$

Beispiel 1:

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \quad \text{gibt} \quad W = \frac{1}{i} x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{i} \omega^2 y \frac{\partial}{\partial x}$$

Beispiel 2:

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} \lambda q^4 \quad \text{gibt} \quad W = \frac{1}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{4} \lambda y^3 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right)$$

Sind a und b Eigenzustände von H zu den Eigenwerten E_a bzw. E_b , so geht

(1.4) über in

$$w_{ab} S_{ab} = W S_{ab} \quad \text{mit} \quad w_{ab} = E_a - E_b \quad (1.5)$$

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit die Lösungsmannigfaltigkeit von (1.4) bzw. (1.5) mit der der Schrödingergleichung übereinstimmt, bzw. wie das Spektrum von W aussieht. Dazu zeigen wir, daß W unitär-äquivalent ist mit dem wesentlich s.a. Operator $H \otimes 1 - 1 \otimes H$, indem wir eine unitäre Transformation von S_{ab} in das Produkt der Schrödingerfunktionen $\overline{\psi_a(s, t)} \psi_b(y, t)$ angeben. Demnach besteht das Spektrum von W aus allen möglichen Differenzen $(w_1 - w_2)$ mit w_1 aus dem Spektrum von H .

Diese unitäre Transformation lautet:

$$S_{ab}(x, y, t) = \int e^{i x s} \overline{\psi_a\left(s - \frac{y}{2}, t\right)} \psi_b\left(s + \frac{y}{2}, t\right) ds =$$

$$= U(\bar{\psi}_\alpha \otimes \psi_\beta)(x, y, t) \quad (1.6)$$

Wie man unmittelbar sieht, ist U ein unitärer Operator von $L^2(\mathbb{R}^2)$ auf sich und man findet (z.B. durch Nachrechnen):

$$U^{-1} W U = H(\xi, \frac{1}{i} \partial_\xi) - H(\eta, \frac{1}{i} \partial_\eta) = H \otimes 1 - 1 \otimes H =: H' \quad (1.7)$$

für alle Elemente aus $D_H \otimes D_H$. Nun haben wir noch zu zeigen, daß H' wesentlich s.a. ist. Dazu benützen wir den

Satz: Sei H wesentlich s.a., dann ist auch $H \otimes 1 - 1 \otimes H$ wesentlich s.a.

Beweis: Nach dem Nelson'schen Kriterium^{x)} haben wir zu zeigen, daß es ein dichtes System von analytischen Vektoren für $H \otimes 1 - 1 \otimes H$ gibt.

Wir betrachten Vektoren der Form $\int_{-\alpha}^{\alpha} dE(\lambda) x =: x_\alpha$

mit für H analytischen Vektoren $x \in D_H$; ($E(\lambda)$ sei die Spektralschar von H)

Die $\{x_\alpha\}$ liegen dicht in Z , da H wesentlich s.a. ist.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \|(H \otimes 1 - 1 \otimes H)^n(x_\alpha \otimes y_\beta)\| &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|(H^{n-k} \otimes H^k)(x_\alpha \otimes y_\beta)\| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\| \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda^{n-k} dE(\lambda) x \otimes \int_{-\beta}^{\beta} \lambda^k dE(\lambda) y \right\| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\alpha|^{n-k} |\beta|^k \\ &\cdot \|x_\alpha \otimes y_\beta\| = (|\alpha| + |\beta|)^n \|x_\alpha \otimes y_\beta\| > \sum_{0}^{\infty} \|(H \otimes 1 - 1 \otimes H)^n(x_\alpha \otimes y_\beta)\| \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

hat endlichen Konvergenzradius.

Nun ist noch zu zeigen, daß endliche Linearkombinationen der $x_\alpha \otimes y_\beta$ analytisch sind, da diese dicht liegen in $Z \otimes Z$. Das folgt aus dem

Hilfssatz: Sind $\{x_i\}$ analytisch für A in Kreisen K_i um $t = 0$, so ist

$$\text{auch } \sum_{i=1}^N c_i x_i \text{ analytisch für } A \text{ in } \bigcap_{i=1}^N K_i.$$

x) siehe mathematische Vorbemerkungen.

Beweis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^N c_i H^n x_i \right\| \frac{1}{n!} |t|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^N |c_i| \|H^n x_i\| |t|^n =$$

$$= \sum_{i=1}^N |c_i| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|H^n x_i\| |t|^n < \infty \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^N K_i$$

da jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert.

Gleichung (1.6) gestattet es, die Funktionen S_{ab} als Elemente eines Hilbert-raums zu interpretieren; für das Skalarprodukt gilt

$$\int \overline{S_{ab}(x, y, t)} S_{cd}(x, y, t) \frac{dx dy}{2\pi} = \langle c | a \rangle \langle b | d \rangle \quad (1.8)$$

speziell

$$\int |S_{ab}(x, y, t)|^2 \frac{dx dy}{2\pi} = 1 \quad \text{für} \quad \langle a | a \rangle = \langle b | b \rangle = 1 \quad (1.8a)$$

Damit ist die mathematische Problemstellung eindeutig festgelegt:

Gesucht ist das Spektrum bzw. die Spektralschar des wesentlich s.a. Differentialoperators W in $L^2(\mathbb{R}^2)$. (Wir wollen im weiteren nur die stationären Lösungen, also Gleichung (1.5) untersuchen; dementsprechend lassen wir die Variable t weg).

2. Die NTD-Methode.

Durch direktes Benützen der Bewegungsgleichung oder bequemer durch Entwicklung von S_{ab} in eine Taylorreihe und Koeffizientenvergleich in Gleichung (1.5), läßt sich ein unendliches Gleichungssystem für die Momente $S_{ab}(m, n)$ herleiten. Das NTD-Verfahren zur approximativen Lösung dieses Gleichungssystems, was offenbar mit einer approximativen Lösung von Gleichung (1.5) äquivalent ist, besteht darin, das unendliche Gleichungssystem nach einer geeigneten Transformation (der sog. "Wick-Transformation") abubrechen. Die "Wick-Transformation" lautet für S :

$$S(x, y) \rightarrow \phi(x, y) := e^{\frac{1}{2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \Gamma y^2} S(x, y) \quad (2.1)$$

$$\text{mit } \Delta = \langle 0 | q^2 | 0 \rangle \quad \text{und } \Gamma = \langle 0 | p^2 | 0 \rangle$$

Das Abbrechen des Gleichungssystems für die $S(m, n)$ kommt einem Projizieren der Gleichung (1.5) auf einen endlichen dimensional Teilraum des Hilbert-raums $L^2(\mathbb{R}^2)$ gleich. Dazu führen wir das Funktionensystem f

$$f_{mn}(x, y) := \frac{1}{m! n!} x^m y^n e^{-\frac{1}{2} \Delta x^2 - \frac{1}{2} \Gamma y^2} \quad (2.2)$$

ein. Die lineare Hülle f_L der f_n liegt dicht im $L^2(\mathbb{R}^2)$, f ist also ein vollständiges System. Die Projektionsoperatoren P_n seien auf f und damit auf f_L definiert durch

$$P_n f_k = \begin{cases} f_k & \text{für } n=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3)$$

Die n -te NTD-Näherung besteht darin, daß man (1.5) ersetzt durch

$$P_n W P_n x = W P_n x \quad (2.4)$$

und dieses endlichdimensionale Eigenwertproblem löst. Leider zeigen die numerischen Ergebnisse ¹⁰⁾ keine Verbesserung der approximativen Eigenwerte mit steigendem n , sondern eher eine Verschlechterung. Eine Erklärung hierfür kann man vielleicht darin sehen, daß die Projektoren unbeschränkte Operatoren sind; das liegt daran, daß die f_n nicht orthogonal sind, sie sind sogar asymptotisch parallel

$$(f_n, f_{n+1}) \rightarrow (f_n, f_n) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

so daß die P_n unter immer flacher werdendem Winkel projizieren, wobei

x) Der Index n wird im weiteren auch als Symbol für Indexpaare verwendet
 $n = (n_1, n_2)$ z.B. für $f_n(x, y) = f_{n_1, n_2}(x, y)$; $n \geq m$ falls $n_i \geq m_i \quad \forall i$.

bestimmte Vektoren sehr lange "Schatten werfen".

Fig. 1



Wir wollen kurz zeigen, daß unendlich viele der P_n unbeschränkt sind.

Satz: Notwendig für die Beschränktheit der P_n ist die Existenz von g_k mit

$$(g_k, f_l) = \delta_{kl}, \text{ und es gilt } \|P_{k-1} - P_k\| = \|g_k\| \|f_k\|$$

Beweis: Seien P_k und P_{k-1} beschränkt, dann existiert $P_k^* - P_{k-1}^*$

und es gilt mit $g_k := \|f_k\|^{-2} (P_k^* - P_{k-1}^*) f_k$

$$(g_k, f_l) = \|f_k\|^{-2} ((P_k^* - P_{k-1}^*) f_k, f_l) = \|f_k\|^{-2} (f_k, (P_k - P_{k-1}) f_l) = \delta_{kl}$$

und

$$\|(P_k - P_{k-1})x\| = \|(g_k, x)\| \|f_k\| \leq \|g_k\| \|f_k\| \|x\|$$

("=" gilt für $x = g_k$)

Die Norm der g_k läßt sich in unserem Fall direkt berechnen. (Wir vereinfachen O.E. auf $f_n = \frac{1}{n!} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$).

Seien $\{\varphi_\ell\}_{\ell=0}^\infty$ die hermiteschen Orthogonalfunktionen, dann gilt

$$\varphi_\ell(x) = \sum_{n \geq \ell} d_{\ell n} f_n(x) \quad \text{wobei} \quad d_{\ell n} = (g_n, \varphi_\ell) = \frac{(-1)^{\frac{\ell-n}{2}} \sqrt{\ell!}}{\sqrt{i\pi} \frac{\ell-n}{2}! 2^{\frac{\ell-n}{2}}} \quad (26)$$

$$> \|g_n\|^2 = \sum_{\ell \geq 0} |d_{\ell n}|^2 = \infty$$

bzw. $d_{\ell n} = 0$ für $n - \ell = 2j+1$

womit die Unbeschränktheit von $P_n - P_{n-1}$ gezeigt ist. Diese Unbeschränktheit der P_n hat zur Folge, daß der Teil von W , der nicht mit den P_n kommutiert, stark verzerrt wird. (Beim harmonischen Oszillator kommutiert P_n mit W , so daß dort das NTD-Verfahren die exakten Lösungen liefert).

Wie kann man nun diese Schwierigkeit auf eine Art und Weise vermeiden, die sich auf die Feldtheorie, also Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden, verallgemeinern läßt? Eine naheliegende Antwort ist: Durch

Einführung eines geeigneten Orthogonalsystems anstelle von f . In Kap. II wird gezeigt werden, wie die Übertragung auf die Feldtheorie möglich ist. In vorliegendem Fall der Quantenmechanik führt dieser Vorschlag, zumindest was die Bestimmung der Eigenwerte von W anbelangt, zum Ziel.

3. Die Entwicklung nach einem ONS.

Es liegt nahe, statt der Funktionen $\frac{1}{n!} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ die durch das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren daraus hervorgehenden hermiteschen Orthogonalfunktionen zu wählen; führt man wieder die zugehörigen Projektionen Q_n ein, so entspricht die Lösung von (2.4) einem Ritzverfahren für einen s.a., aber nicht positiv-definiten Operator. Dieses Verfahren wurde für den anharmonischen Oszillator mit $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} q^4$ numerisch getestet und erwies sich als sehr zufriedenstellend ¹¹⁾. (Siehe Fig. 2 und 3).

Darüber hinaus läßt sich folgender Konvergenzsatz beweisen:

Satz: Sei W ein s.a. Operator im Hilbertraum H ,

$\{ \varphi_n \}_{n=1}^{\infty}$ ein vollständiges ONS mit $\varphi_n \in D(W)$ mit zugehörigen Projektionen Q_n .

Sei ferner x normierter Eigenvektor von W zum Eigenwert w und es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \| (Q_n W Q_n - w)x \| = 0$, dann gibt es zu jedem $r > 0$ ein $N(r)$, so daß $Q_n W Q_n$ einen Eigenwert im Intervall $|\lambda - w| \leq r$ für $n \geq N(r)$ hat.

Korollar: Die hier gemachten Voraussetzungen treffen beim anharmonischen Oszillator zu.

Bemerkung: Die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \| (Q_n W Q_n - w)x \| = 0$ entspricht in gewisser Weise der beim Ritzverfahren für positive Operatoren W gestellten Bedingung, so daß die φ_n in der durch (Wx, x) bestimmten Topologie vollständig sind ¹²⁾.

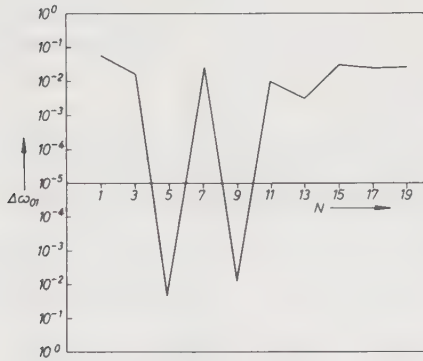


Fig. 2. Der Fehler $\Delta\omega_1 = \omega_1^N - \omega_1$ in Abhängigkeit von N für die NTD-Approximation nach Schwartz ¹⁰⁾

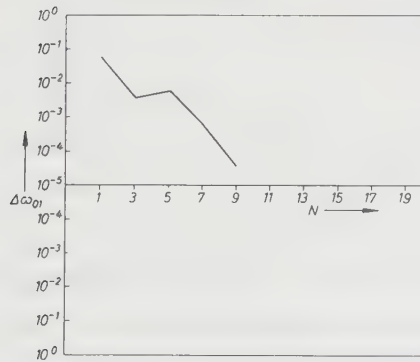


Fig. 3. Der Fehler $\Delta\omega_1 = \omega_1^N - \omega_1$ in Abhängigkeit von N für orthogonale Projektion. (In beiden Fällen $\Delta = \bar{\Gamma} = \frac{1}{2}$, richtiger Wert $\omega_1 = 1.087$).

Beweis des Satzes:

Annahme: Beh. falsch $\exists \epsilon > 0$ und eine Folge $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$
 mit $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, so daß $Q_{n_i} W Q_{n_i}$ keinen Eigenwert im Intervall
 $|\lambda - w| \leq \epsilon$ hat >
 $\|(Q_{n_i} W Q_{n_i} - w)^{-1}\| \leq \frac{1}{\epsilon}$ da $Q_{n_i} W Q_{n_i}$ ebenfalls s.a. ist und
 das Spektrum nur Eigenwerte enthält.

Es gilt aber

$$1 = \|x\| = \|(Q_{n_i} W Q_{n_i} - w)^{-1} (Q_{n_i} W Q_{n_i} - w)x\| \leq \\ \leq \frac{1}{\epsilon} \|(Q_{n_i} W Q_{n_i} - w)x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \infty \quad \underline{\text{Wid!}}$$

Beweis des Korollars:

Die zu beweisende Beziehung lautet:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} w_{k\ell} x_{\ell} \right|^2 = 0$ mit $w_{k\ell} = (\varphi_k, W \varphi_{\ell})$ und $x_{\ell} = (\varphi_{\ell}, x)$
 Die Matrix $w_{k\ell}$ hat Streifenform längs der Diagonalen, so daß für
 festes k nur eine feste endliche Anzahl der $w_{k\ell}$ von Null verschiede-
 nen sind. Diese Elemente sind von der Größenordnung ℓ^{-3} , die x_{ℓ} fal-
 len aber stärker als jede Potenz von ℓ^{-1} ab, wie der folgende
 Hilfssatz zeigt:

H.S. Seien die φ_n normierte Eigenvektoren des s.a. Operators A mit
 den Eigenwerten $\lambda_n \neq 0$; ist $x \in D(A^k)$ für alle n , so gibt es zu
 jeder nat. Zahl k ein $c(k) > 0$ mit

$$|x_{\ell}| = |(\varphi_{\ell}, x)| \leq \frac{c(k) \|x\|}{|\lambda_{\ell}|^k} \quad \text{für alle } \ell.$$

Beweis:

$$|(\varphi_{\ell}, A^k x)| = |\lambda_{\ell}|^k |(\varphi_{\ell}, x)| \leq \|A^k x\| =: c(k)$$

Setzt man $A = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$, so ist $\lambda_{\ell} = \ell + \frac{1}{2}$ und die beim
 Beweis des Korollars aufgestellte Behauptung ist bewiesen.

Somit gilt $\left| \sum_{k=1}^{\infty} W_{k\ell} x_k \right|^2 \leq \frac{C(p)}{k^p}$ für ein beliebiges $p > 0$, z.B. $p = 2$

$$> \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} W_{k\ell} x_l \right|^2 \leq \frac{\text{const.}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Die Konvergenz der Eigenvektoren scheint sich im Falle des anh. Oszillators zumindest anzudeuten, es gelang mir jedoch nicht, einen allgemeinen Konvergenzbeweis zu erbringen; er wird durch die fehlende Definitheit des Operators W erschwert.

II. Feldtheorie, einzeitige Formulierung.

4. Mathematische Problemstellung.

Wir werden nun versuchen, die Überlegungen des I. Kapitels konsequent auf den Fall unendlich vieler Freiheitsgrade in Form einer Feldtheorie zu übertragen. Um die aus den physikalischen Forderungen der Lorentzinvarianz und Kausalität resultierenden Schwierigkeiten zu vermeiden, werden wir die Wechselwirkung nicht lokal ansetzen, wobei wir uns vorstellen, daß der erwünschte Grenzfall der lokalen, lorentzinvarianten Theorie durch einen an geeigneter Stelle vorzunehmenden Grenzübergang erreicht werden kann. Inwieweit diese Hoffnung berechtigt ist, kann nur durch genaue Analyse des auftretenden Gleichungssystems entschieden werden, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Wir wollen uns damit begnügen, ein Entwicklungsverfahren für das erzeugende Funktional der Korrelationsfunktionen anzugeben, das dem im I. Kapitel entspricht. Dazu ist es nötig, eine Gleichung (14) entsprechende Differentialgleichung herzuleiten und sie mit einer (1.3) entsprechenden Randbedingung zu versehen. Das erfordert die Definition einer Differentiation und Integration für Funktionale.

Wir gehen aus von einem Feld $\varphi(x)$, das wir der Einfachheit wegen

als skalar und reell annehmen. φ sei für festes t eine operatorwertige Distribution φ_t auf einem geeigneten reellen Testfunktionenraum $\mathcal{T}^{(x)}$ entsprechendes gelte für den kanonisch konjugierten Impuls $\pi_t = \dot{\varphi}_t$. Die Realität von φ bedeutet

$$\varphi_t(f)^* = \varphi_t(f) \text{ bzw. } \pi_t(g)^* = \pi_t(g) \quad (4.1)$$

d.h. $\varphi_t(f)$ bzw. $\pi_t(g)$ sollen s.a. Operatoren für festes f und $g \in \mathcal{T}$ sein. Wir definieren das erzeugende Funktional

$$S_{ab}(f, g, t) := \langle a | e^{i\varphi_t(f) + i\pi_t(g)} | b \rangle \quad (4.2)$$

$S_{ab}(f, g, t)$ ist für festes t ein nichtlineares, stetiges Funktional auf $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, das wegen seiner Beschränktheit ($|S_{ab}| \leq \|a\| \|b\|$ mit $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$) auf $L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ fortsetzbar ist. Diese Fortsetzung wollen wir ebenfalls mit S_{ab} bezeichnen, da im folgenden nur diese auftritt. Um aus S_{ab} die den Momenten entsprechenden Korrelationsfunktionen (auch n -Punktfunktionen genannt) ableiten zu können, brauchen wir einen der partiellen Differentiation $\frac{\partial}{\partial x}$ entsprechenden Operator. Dieser Operator, die sog. Funktionalableitung, läßt sich für Funktionale auf beliebigen topologischen Vektorräumen definieren (siehe Anhang 1) und stellt eine Verallgemeinerung der Richtungsableitung im $\mathbb{R}^n$ dar. Wir wollen hier nur die algebraischen Eigenschaften angeben.

Sei F ein Funktional auf $\mathcal{T}$ und $a \in \mathcal{T}$, dann ist $D_a F$ die Ableitung von F in Richtung a (das entspricht $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$) wieder ein Funktional auf $\mathcal{T}$. $D_a F$ ist linear in a , jedoch i.A. nicht linear als Funktional auf $\mathcal{T}$. Für differenzierbare Funktionale F und G gelten die Rechenregeln ¹³⁾

x) $\mathcal{T}$ soll ein dichter Teilraum des $L^2(\mathbb{R}^3)$ sein, ferner sollen alle im folgenden auftretenden Operationen (z.B. Differenzieren) möglich sein. Eine mögliche Wahl wäre z.B. der Raum S von L. Schwartz.

(L) Linearität: $D_a(\alpha F + \beta G) = \alpha D_a F + \beta D_a G$

(P) Produktregel: $D_a(F \cdot G) = G(D_a F) + F(D_a G)$ (4.3)

(N) Normierung: Ist F aus $\mathcal{T}'$ (d.h. eine Distribution auf $\mathcal{T}$),
so gilt $D_a F = F(a)$

(K) Kettenregel: Ist h eine gewöhnliche Funktion auf $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{T}$,
so gilt $D_a(h \circ F)(f) = h'(F(a)) \cdot D_a F(f)$

Für festes $f \in \mathcal{T}$ ist $D_a F(f)$ ein stetiges lineares Funktional von
 $a \in \mathcal{T}$,⁽³⁾ also ein Element aus $\mathcal{T}'$, das legt die Schreibweise
 $D_a F(f) \approx \langle a, \frac{\delta F}{\delta f} \rangle$ nahe^{x)}.

Durch wiederholte Differentiation von $S_{ab}(f, g, t)$ ^{xx)} gewinnen wir nun
die Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} & \langle a_1, \frac{\delta}{\delta f} \rangle \dots \langle a_m, \frac{\delta}{\delta f} \rangle \langle b_1, \frac{\delta}{\delta g} \rangle \dots \langle b_n, \frac{\delta}{\delta g} \rangle S_{ab}(f, g, t) \Big|_{f=g=0} \\ &= \langle a | \text{Sym}(\psi_t(a_1) \dots \psi_t(a_m) \bar{\pi}_t(b_1) \dots \bar{\pi}_t(b_n)) | b \rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

Als nächsten Schritt wollen wir die der Gleichung (1.4) entsprechende
Differentialgleichung ableiten. Die Dynamik sei durch einen Hamiltonopera-
tor als Funktion des Feldes gegeben. Mit Hilfe der gleichzeitigen Vertau-
schungsrelationen von ψ_t und $\bar{\pi}_t$ bedarf es nur einer elementaren Rech-
nung, um unter Verwendung der sog. Hausdorff-Formel¹⁴⁾ die (1.4) analoge
Gleichung zu erhalten. Für das Weitere werden wir uns auf den Modellfall
der skalaren reellen ϕ^4 -Theorie beschränken, alle Überlegungen lassen
sich jedoch sofort auf beliebige Felder mit "Polynomwechselwirkung" über-
tragen (auch auf Spinorfelder). Wir gehen aus von den Bewegungsgleichungen

x) Ist $\delta(x) \in \mathcal{T}$, so kann man auch $\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \langle \delta, \frac{\delta F}{\delta f} \rangle$ einführen,
wobei $\langle a, t \rangle$ der Wert $t(a)$ der Distribution $t \in \mathcal{T}'$ bei $a \in \mathcal{T}$ ist.
xx) Die Differenzierbarkeit von S_{ab} auf $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ ergibt sich unmittelbar
aus den gemachten Annahmen.

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = \overline{\Pi}_t(x) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\Pi}_t(x) = (\nabla^2 - m^2) \varphi_t(x) - \lambda \int V(x, x_1, x_2, x_3) \varphi_t(x_1) \varphi_t(x_2) \varphi_t(x_3) dx_1 \dots dx_3$$

V sei bezüglich x_1, x_2, x_3 ein Element von $\mathcal{T}$ und symmetrisch in den x_i .

($\mathcal{T}$ sei so beschaffen, daß die Anwendung von $\nabla^2 - m^2$ definiert ist).

Gehen wir von den Vertauschungsrelationen (kanonisch für $\varphi_0 = 1$) ^{x)}

$$[\varphi_t(x), \overline{\Pi}_t(y)] = i \varphi_0(x, y) 1$$

aus, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} S(f, g, t) = W S(f, g, t)$$

mit (4.6)

$$W = \langle f, \frac{\partial}{\partial g} \rangle - \frac{\lambda}{4} \varphi_0 \langle V, g^3 \frac{\partial}{\partial f} \rangle + \lambda \langle V, g \frac{\partial^3}{\partial f^3} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial f}, (\nabla^2 - m^2) g \rangle$$

wobei

$$\langle V, g^3 \frac{\partial}{\partial f} \rangle = \int V(x, x_1, x_2, x_3) g(x_1) g(x_2) g(x_3) \frac{\partial}{\partial f(x_3)} dx_1 \dots dx_3$$

und

$$\langle V, g \frac{\partial^3}{\partial f^3} \rangle = \int V(x, x_1, x_2, x_3) g(x) \frac{\partial}{\partial f(x_1)} \frac{\partial}{\partial f(x_2)} \frac{\partial}{\partial f(x_3)} dx_1 \dots dx_3$$

wenn man die entsprechenden Distributionen in suggestiver Weise als Integrale schreibt. Die zeitunabhängige Form von (4.6) lautet ganz entsprechend zu Gleichung (1.5)

$$(E_a - \overline{E}_k) S_{ab}(f, g, t) = W S_{ab}(f, g, t) \quad (4.7)$$

Gleichung (4.6) bzw. (4.7) müssen noch durch geeignete Randbedingungen ergänzt werden. Der natürlichste Weg ist eine Zurückführung auf die Normierung im Zustandsraum, wie es im Falle der gewöhnlichen Quantenmechanik (Gl. (1.6)) möglich war. Diesem Ziel soll der nächste Abschnitt dienen, vorher werden wir noch die Normierung (1.8) etwas anders interpretieren. Wir

$$\overline{x)} (f, g) = \int \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x}) d^3x$$

denken uns $S_0(x,y) = \langle 0 | e^{ixq+iy p} | 0 \rangle$ mit dem Grundzustand $|0\rangle$ von H gegeben und definieren

$$Z_{ab}(x,y) := S_0(x,y)^{-1} S_{ab}(x,y) \quad \text{dann lautet (1.8)}$$

$$\int |Z_{ab}(x,y)|^2 d\mu_0(x,y) = \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle \quad (4.8)$$

wobei $d\mu_0(x,y) = |S_0(x,y)|^2 \frac{dx dy}{2\pi}$ gesetzt ist. Als Approximation für das unbekannte $S_0(x,y)$ setzen wir $S_0(x,y)_{\text{appr.}} = \frac{1}{N} e^{-\frac{1}{2}\Delta x^2 - \frac{1}{2}\Gamma y^2}$ (N dient zur Normierung), definiert man $H(x,y) := \ln S_0(x,y) =$

$$= \sum_{m,n \geq 0} \frac{i^{m+n}}{m!n!} \gamma(m|n) x^m y^n$$

so ist $\ln S_0(x,y)_{\text{appr.}}$ gerade die tiefste Näherung für $H(x,y)$ mit $\Delta = \langle 0 | q^2 | 0 \rangle$ und $\Gamma = \langle 0 | p^2 | 0 \rangle$. In der Feldtheorie bedeutet das

$$S_0(f,g)_{\text{appr.}} = \frac{1}{N} e^{-\frac{1}{4}(f,f)_c - \frac{1}{4}(g,g)_D} \quad \text{wobei}$$

$$(f,f)_c := \int f(x) C(x-y) f(y) dx dy \quad \text{bzw.}$$

$$(g,g)_D := \int g(x) D(x-y) g(y) dx dy \quad \text{mit}$$

$$C(x-y) = 2 \langle 0 | \varphi_t(x) \varphi_t(y) | 0 \rangle \quad \text{bzw.}$$

$$D(x-y) := 2 \langle 0 | \pi_t(x) \pi_t(y) | 0 \rangle \quad (|0\rangle \text{ bedeutet das phys. Vakuum}).$$

Was wir also benötigen, ist ein Integral über dem Hilbertraum

$$H = L^2(C) \oplus L^2(D), \quad \text{wobei } L^2(C,D) = \left\{ f : (f,f)_{C,D} < \infty \right\}^x.$$

Dazu ist vorauszusetzen, daß $(\dots)_C$ und $(\dots)_D$ positiv definite Bilinearformen sind, der Fall indefiniter Metrik wird also hier ausgeschlossen.

In der Definition des Integrals folgen wir einer Darstellung von

x) Wir gehen davon aus, daß $\mathcal{T}$ dicht liegt in $L^2(C)$ bzw. $L^2(D)$, dann kann $S_{ab}(f,g)$ auf $H = L^2(C) \oplus L^2(D)$ fortgesetzt werden.

Gross¹⁵⁾.

Sei H ein beliebiger Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Wir definieren das Integral zunächst für sog. Zylinderfunktionale, das sind solche, für die es eine orthogonale Projektion P auf einen endlich-dimensionalen Teilraum von H gibt, so daß

$$F(f) = F(Pf) \quad \text{für } \forall f \in H \quad \text{gilt.}$$

Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ ein vollständiges ONS in PH und $Pf = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Wir setzen

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = F(Pf)$$

und

$$I(f) := \int \bar{F}(x_1, \dots, x_n) d g_n(x)$$

$$\text{mit } d g_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n$$

$I(F)$ ist unabhängig von der Auswahl der Basis $\{e_i\}$. $I(|F|)$ definiert eine L^1 -Norm^{x)} auf den Raum der integrierbaren Zylinderfunktionale; Sei $L^1(H, g)$ die Vervollständigung dieses Raums in dieser Norm. Ist P eine Projektion, so können wir jedem Funktional F ein Zylinderfunktional $F \circ P$ zuordnen durch $F \circ P(f) = F(pf)$. Sei $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ eine aufsteigende Schar von Projektionen mit $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$. Falls der $\lim_{n \rightarrow \infty} I(F \circ P_n)$ existiert und unabhängig von P_n ist, so liegt F in $L^1(H, g)$. Analog führen wir den Raum $L^2(H, g)$ der quadratintegrierbaren Funktionale ein.

Leider erweist sich das so definierte Integral $I(\cdot)$ (bzw. das zugehörige Maß) als nicht σ -additiv, was für die Durchführung von Grenzprozessen (z.B. Vertauschung von Limiten $F_n \rightarrow F$ mit dem Integral) sehr hinderlich ist (vergl. Riemann-Integral und Lebesgue-Integral). Man kann jedoch einen Maßraum (X, μ) finden (X ist ein kompakter Hausdorffraum)

x) Genauer gesagt eine Pseudonorm, aus der man in üblicher Weise durch Quotientenbildung eine Norm gewinnt.

so daß H dicht liegt in X und eine isometrische Einbettung i von $L^2(H, g)$ in $L^2(X, \mu)$, d.h. jedem F mit $I(|F|^2) < \infty$ wird eine Funktion $i(F) = \tilde{F}$ zugeordnet, so daß gilt

$$I(|F|^2) = \int_X |\tilde{F}(x)|^2 d\mu(x) \quad (4.10)$$

Um eine etwas suggestivere Schreibweise einzuführen, werden wir in Zukunft den Gaußfaktor $e^{-\frac{1}{2}(f, f)}$, der in dem Maß dg steckt, zu den Funktionalen schreiben, d.h. wir gehen von $L^2(H, g)$ über zu $L^2(H, \delta f) := \{ F(f) e^{-\frac{1}{2}(f, f)} \text{ mit } F \in L^2(H, g) \}$ und setzen für $F, G \in L^2(H, \delta f)$

$$\int F(f) G(f) \delta f := I(F(f) G(f) e^{\frac{1}{2}(f, f)}) \quad (4.11)$$

In dieser Form läßt sich auch die partielle Integration besonders einfach formulieren ¹⁶⁾

$$\int F(f) \langle \alpha, \frac{\delta G}{\delta f}(f) \rangle \delta f = - \int \langle \alpha, \frac{\delta F}{\delta f}(f) \rangle G(f) \delta f \quad (4.12)$$

Sie gilt für alle differenzierbaren F und G , für die $\lim_{\|f\| \rightarrow \infty} (F(f)G(f)) = 0$ gilt und beide Seiten von (4.12) existieren. Der Beweis dieser Formel ergibt sich aus dem entsprechenden Satz für endlich-dimensionale Integrale.

Damit ist ein wohldefinierter mathematischer Rahmen für das feldtheoretische Problem gegeben: Wir betrachten einen Raum $L^2(H, \delta f)$ von quadratintegrablen Funktionalen auf H , die auf $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ hinreichend oft differenzierbar sind, haben einen Differentialoperator in diesem Raum gegeben und fragen nach seinen Eigenschaften, also z.B., ob er s.a. ist, wie sein Spektrum aussieht usw. Ferner suchen wir ein geeignetes Approximationsverfahren für sein Spektrum bzw. seine Spektralschar. Wir werden uns auf das letztere, etwas pragmatische Problem beschränken und versuchen, das in Kap I angegebene Entwicklungsverfahren zu übertragen. Zunächst werden wir

Jedoch kurz den Fall des freien Feldes ($\lambda = 0$) streifen, für den wir z.B. in der Fockraumdarstellung eine explizite Lösung haben. Der Operator W hat die Form

$$W = \left(f, \frac{\delta}{\delta g} \right)_D + \left(\frac{\delta}{\delta f}, (\nabla^2 u') g \right)_C \quad (4.13)$$

Als Testfunktionenraum wählen wir den Raum $S(R^3)$ (nur reelle Funktionen!).

Die Distribution $\tilde{C}$ bzw. $\tilde{D}$ lauten im Impulsraum

$$\tilde{C}(\vec{p}) = (\vec{p}^2 + m^2)^{-1/2} \quad \text{und} \quad \tilde{D}(\vec{p}) = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \quad (4.14)$$

Im Anhang wird gezeigt, daß W ein wesentlich s.a. Operator in $L^2(H, g)$ ist mit $H = L^2(C) \oplus L^2(D)$. Hier werden wir nur an einem Beispiel nachweisen, daß die Normierungsbedingung tatsächlich die Norm im Zustandsraum ergibt. Dazu definieren wir einen Einteilchenzustand

$$|a\rangle = \varphi(k) |0\rangle \quad \text{und} \quad |b\rangle = |0\rangle, \quad \text{dann ist}$$

$$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2} (k, k)_C \quad \text{und} \quad \langle k|k\rangle = \langle 0|0\rangle = 1. \quad \text{Das zugehörige}$$

Funktional lautet

$$S_{a0}(f, g) = \frac{1}{2} [i(f, k)_C - (g, k)] e^{-\frac{i}{4}(f, f)_C - \frac{1}{4}(g, g)_D} \quad (4.15)$$

$$\text{d.h.} \quad Z_{a0}(f, g) = \frac{1}{2} [i(f, k)_C - (g, k)]$$

Wir wissen also einen Ausdruck der Form $\frac{1}{4} I(1(f, k)_C)^2 + 1(g, k)^2$ berechnen. Das ist besonders einfach, da $(f, h)_C$ ein Zylinderfunktional mit eindimensionaler Projektion P ist. Setzt man für $f = \frac{f k}{\sqrt{(k, k)_C}} + f'$ mit $(f', h)_C = 0$, so ergibt sich

$$\frac{1}{4} I(1(f, k)_C)^2 = \frac{1}{4} (k, k)_C \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{1}{2} \xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{4} (k, k)_C$$

Dasselbe Ergebnis erhält man für $I(\frac{1}{4} 1(g, k)^2)$, wenn man beachtet, daß $(g, h) = (g, Ch)_D$ gilt. Somit ergibt sich

$$\mathbb{I}(|\mathcal{Z}_{a_0}(f, g)|^2) = \frac{1}{2} (k, k)_c = \langle a | a \rangle$$

Ganz analog verläuft die Rechnung für Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ mit mehreren Teilchen.

5. Die Entwicklung nach einem ONS in $L^2(H, \delta f)$.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, ein vollständiges ONS in $L^2(H, \delta f)$ einzuführen und eine Matrixdarstellung des Operators W in (4.6) zu finden. Dabei handelt es sich um ein unendliches System von Differential- bzw. Integralgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten des erzeugenden Funktionals S_{ab} nach diesem ONS. Die Approximation besteht wie im I. Kapitel im Abbrechen des unendlichen Systems.

Wir betrachten Funktionale in Potenzform

$$P_k(f) := (f, a_1) \dots (f, a_k) \quad (5.1)$$

mit beliebigen $(a_1, \dots, a_n) \in H$

die wir durch Anwendung eines Operators D orthogonalisieren. D ist definiert durch ⁸⁾ x)

$$DP_k(f) := \frac{1}{\sqrt{k!}} e^{-\frac{1}{2}(f, f)} P_k\left(f - \frac{\delta}{\delta f}\right) 1 \quad (5.2)$$

Sei $Q_\ell(f) = (f, b_1) \dots (f, b_\ell)$ entsprechend wie P_k definiert, dann gilt folgende Orthogonalitätsrelation:

$$(DP_k, DQ_\ell)_H := \int \overline{DP_k(f)} DQ_\ell(f) \delta f = \frac{1}{k!} \delta_{k\ell} \sum_{\pi \in S_k} (a_1, b_{\pi(1)}) \dots (a_k, b_{\pi(k)}) \quad (5.3)$$

Beweis: Sei O.E. $k > \ell$

x) Es ist zu beachten, daß $\frac{\delta}{\delta f}$ wegen (4.3N) so normiert ist, daß $(a, \frac{\delta}{\delta f})(f, b) = (a, b)$ ist, wobei $(\dots)$ auch $(\dots)_C$ oder $(\dots)_D$ bedeuten kann.

$$\begin{aligned} \int \overline{DP_k(f)} DQ_k(f) df &= \frac{1}{\sqrt{k! \ell!}} \int e^{-\frac{1}{2}(f,f)} \overline{P_k(f - \frac{df}{\sqrt{k}})} \cdot Q_k(f - \frac{df}{\sqrt{k}}) \cdot 1 df = x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k! \ell!}} \int (-1)^k \overline{P_k(\frac{df}{\sqrt{k}})} e^{-\frac{1}{2}(f,f)} \cdot 1 Q_k(f - \frac{df}{\sqrt{k}}) \cdot 1 df = \frac{1}{\sqrt{k! \ell!}} \int e^{-\frac{1}{2}(f,f)} \\ &\cdot \overline{P_k(\frac{df}{\sqrt{k}})} Q_k(f - \frac{df}{\sqrt{k}}) \cdot 1 df = \frac{1}{k!} \delta_{k\ell} \sum_{\pi \in S_k} (a_1, b_{\pi(1)}) \dots (a_k, b_{\pi(k)}) \int e^{-\frac{1}{2}(f,f)} df \end{aligned}$$

wobei wir die partielle Integration (4.12) benutzt haben.

Da $\int e^{-\frac{1}{2}(f,f)} df = 1$ ist, ist (5.3) bewiesen.

Wir wollen nun ein spezielles, vollständiges ONS vom Typ $DP_k(f)$ einführen.

Dazu wählen wir eine orthogonale Basis $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ in H und definieren

"Potenzfunktionale"

$$\alpha_p(m, f) := (f, \alpha_{m_1}) \dots (f, \alpha_{m_p}) \quad (5.4)$$

dabei ist $m = (m_1, \dots, m_p)$. Nun orthogonalisieren wir die $\alpha_p(m, f)$ durch

Anwendung des Operators D aus (5.2) und erhalten

$$D\tau_p(m, f) = \frac{1}{p!} e^{-\frac{1}{2}(f,f)} \alpha_p(m, f - \frac{df}{\sqrt{k}}) \cdot 1 \quad (5.3)$$

Dann gilt nach (5.3) die Orthogonalitätsrelation

$$(D\alpha_p(m, f), D\alpha_q(n, f))_H = \delta_{pq}(u|u) \quad (5.6)$$

$$\text{mit } \delta_{pq}(u|u) := \frac{1}{p!} \delta_{pq} \sum_{\pi \in S_p} \delta_{m_1, n_{\pi(1)}} \dots \delta_{m_p, n_{\pi(p)}}$$

(Summation über alle Permutationen von $\{1, \dots, p\}$).

Das System $\{D\alpha_p(m, f)\}$, sog. "Hermiteische Funktionale" ^{xx)}, ist vollständig im $L^2(H, df)$ ¹⁷⁾. Damit haben wir eine orthogonale Basis in $L^2(H, df)$ gefunden, nach der wir jedes Funktional aus diesem Raum entwickeln können, d.h. für $S \in L^2(H, df)$ gilt

x) Partielle Integration

xx) Die $D\alpha_p(m)$ entsprechen den Hermiteischen Orthogonalfunktionen in $L^2(dx)$

$$S(f) = \sum_{p, (u)} s_p(u) D \varphi_p(u, f) \quad x) \quad (5.7)$$

mit
$$s_p(u) = \int \overline{D \varphi_p(u, f)} S(f) df \quad (5.8)$$

und ferner
$$(S, S)_H = \int |S(f)|^2 df = \sum_{p, (u)} |s_p(u)|^2 \quad (5.9)$$

Mit Hilfe dieser Basis können wir nun jedem Operator A in $L^2(H, df)$, falls die auftretenden Skalarprodukte existieren, eine Matrixdarstellung

$$A_{pq}(u, v) = \int \overline{D \varphi_p(u, f)} A D \varphi_q(v, f) df \quad (5.10)$$

zuordnen.

Allerdings muß man, um A_{pq} zu bestimmen, das rechts stehende Integral auswerten können. Das gelingt für Operatoren der Form

$A = \sum_{m, n \in M} P_m(f) Q_n\left(\frac{\partial}{\partial f}\right)$, wobei P_m und Q_n "Polynome" vom Grad m bzw. n sind, mit Hilfe folgender Rekursionsformeln ⁵⁾:

$$\begin{aligned} a) \quad (a, f) D \varphi_p(u, f) &= \frac{1}{\sqrt{p}} D\left((u, \frac{\partial}{\partial f}) \varphi_p(u, f)\right) + \sqrt{p+1} D\left((a, f) \varphi_p(u, f)\right) \\ b) \quad (a, \frac{\partial}{\partial f}) D \varphi_p(u, f) &= \frac{1}{2\sqrt{p}} D\left((a, \frac{\partial}{\partial f}) \varphi_p(u, f)\right) - \frac{\sqrt{p+1}}{2} D\left((a, f) \varphi_p(u, f)\right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

wobei unter D der in (5.2) definierte Operator zu verstehen ist, der jedem "Polynom" die entsprechende Orthogonalfunktion zuordnet. Um z.B. die Matrixdarstellung des Operators $(a, \frac{\partial}{\partial f})$ zu bestimmen, genügt es, die Rekursionsformel (5.11b) zu verwenden und die entsprechenden Skalarprodukte mit (5.6) auszurechnen. Wir wollen diesen Weg in diesem einfachen Fall explizit durchführen, anschließend jedoch ein graphisches Verfahren angeben, das es gestattet, sofort die Matrixdarstellung jedes Differentialoperators mit

x) $\sum_{p, (u)}$ bedeutet Summe über p und für festes p, über alle Kombinationen $(m_1, \dots, m_p)$

Polynomkoeffizienten anzugeben.

$$\begin{aligned}
 & (D\alpha_p(u, f), (a, \frac{\partial}{\partial f}) D\alpha_q(u, f))_n = \\
 & = \int \left[\overline{D\alpha_p(u, f)} \left(\frac{1}{2\sqrt{q}} D((a, \frac{\partial}{\partial f}) \alpha_q(u, f)) - \frac{\sqrt{q+1}}{2} D((a, f) \alpha_q(u, f)) \right) \right] df = \\
 & = \int \overline{D\alpha_p(u, f)} \frac{1}{2\sqrt{q}} \sum_{i=1}^q (u, \tau_i) D\alpha_{q-i}(u-u_i, f) df - \frac{\sqrt{q+1}}{2} \int \overline{D\alpha_p(u, f)} D((a, f) \alpha_q(u, f)) df = \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{q}} \sum_{i=1}^q (a, \tau_i) \mathcal{P}_{p, q-i}(u|u-u_i) - \frac{1}{2\sqrt{q+1}} \sum_{i=1}^p (\tau_{u_i}, a) \hat{\mathcal{C}}_{p, q-i}(u-u_i|u) \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $n = n_1$ die Indexmenge $n = (n_1, \dots, n_q)$ mit gestrichenem n_1 .

Die Aufstellung des Gleichungssystems, das zu einer Funktionaldifferentialgleichung gehört, wird durch die Einführung einer Graphen-Schreibweise

stark vereinfacht. Seien $s_p(n)$ die zu einem Funktional $S(f)$ gehörigen

Entwicklungskoeffizienten, so ordnen wir den Koeffizienten $s_q(m)$ dem

Graphen $q \equiv \bigcirc$ mit den q Beinen $(n_1, \dots, n_q)$ zu. Den Operatoren (a, f)

bzw. $(a, \frac{\partial}{\partial f})$ mit den zugehörigen Matrizen $(a, f)_{pq}(m|n)$ bzw. $(a, \frac{\partial}{\partial f})_{pq}$

$(m|n)$ ordnen wir die Graphen

$$(a, f) \sim \frac{1}{\sqrt{q}} \leftarrow + \sqrt{q+1} \rightarrow \quad \text{bzw.} \quad (a, \frac{\partial}{\partial f}) \sim \frac{1}{2\sqrt{q}} \leftarrow - \frac{\sqrt{q+1}}{2} \rightarrow \quad (5.13)$$

zu, dabei bedeutet $\leftarrow$ Abspalten eines Index n_1 aus $s_q(n)$ und $\rightarrow$ Hinzufügen eines Index m_1 von den linken Indizes der dem Operator entsprechenden

Matrix $W_{pq}(m|n)$. Hintereinanderausführen von Operatoren wie z.B.

$(a_1, \frac{\partial}{\partial f}) (a_2, \frac{\partial}{\partial f})$ bedeutet Kombination der Pfeile ($\leftarrow$ bzw. $\rightarrow$

bzw. $\Rightarrow$), wobei auf entsprechende Erhöhung bzw. Erniedrigung der Faktoren $\sqrt{q+1}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{q}}$, wie sie aus (5.8) hervorgeht, zu achten ist. Zusätzlich

treten auch Ausdrücke $\leftrightarrow$ auf, die Kombinationen (a_1, a_2) entsprechen, die bei der Anwendung von $(a, \frac{\partial}{\partial f})$ auf $D(a_2, f) \alpha_q(n, f)$ entstehen.

Schließlich sind alle Ausdrücke mit r nach rechts zeigenden Pfeilen durch

den Faktor $p(p-1) \dots (p-r+1)$ zu dividieren (z.B. $\overleftrightarrow{\Rightarrow}$ oder $\overleftrightarrow{\leftarrow}$

durch $p(p-1)$).

Beispiel:

$$(F, \frac{\delta^3}{\delta f^3}) = \int F(x_1, x_2, x_3) \frac{\delta}{\delta f(x_1)} \frac{\delta}{\delta f(x_2)} \frac{\delta}{\delta f(x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

wobei F symmetrisch in allen drei Argumenten ist, ergibt:

$$\frac{1}{8} F \left(\frac{1}{\sqrt{(p+1)(p+2)(p+1)}} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} - \frac{1}{p\sqrt{p+1}} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} - \frac{1}{\sqrt{p+1}} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftrightarrow \end{array} + \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{array}{c} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{array} + \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{array} - \frac{1}{\sqrt{p(p-1)(p-2)}} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \quad x) \quad (5.14)$$

Die Gleichung $(F, \frac{\delta^3}{\delta f^3}) S(f) = \lambda S(f)$ sieht dann so aus:

$$\lambda \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(p+1)(p+1)(p+1)}} \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_F - \frac{1}{p\sqrt{p+1}} \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_F \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_{3p^2(p+1)} - \frac{1}{\sqrt{p+1}} \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_F \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_{3(p+1)} + \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_F \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_{3p} + \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_F \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_{3p(p-1)^L} - \frac{1}{\sqrt{(p-2)(p-1)p}} \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_F \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}_{p(p-1)(p-2)} \right\} \quad (5.15)$$

Diese Gleichung lautet ausgeschrieben:

$$\lambda S_p(m_1, \dots, m_p) = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(p+1)(p+1)(p+1)}} \sum_{n_1, n_2, n_3} F_{n_1 n_2 n_3} S_{p+3}(m_1, \dots, n_1, n_2, n_3, m_p) - \frac{3}{p\sqrt{p+1}} \sum_{i, n_1, n_2} F_{n_1, n_2, n_3} S_{p+1}(m_1, \dots, n_1, n_2, n_3, m_p) - \frac{3}{\sqrt{p+1}} \sum_n \hat{F}_n S_{p+1}(m_1, \dots, n, m_p) + \frac{3}{\sqrt{p}} \sum_i \hat{F}_{n_i} S_{p-1}(m_1, \dots, n_i, \dots, m_p) + \frac{3}{(p-1)\sqrt{p}} \sum_{i, j, n} F_{n_i, n_j, n} S_{p-1}(m_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, m_p) - \frac{1}{\sqrt{p(p-1)(p-2)}} \sum_{i, j, k} F_{n_i, n_j, n_k} S_{p-3}(m_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_k, \dots, m_p) \right\}^{xxx} \quad (5.16)$$

x) Alle Faktoren q sind durch Verwendung der auftretenden $\hat{C}_{p_i, q-k}$ durch entsprechende Faktoren p+k ersetzt.

xx) Jeder Graph steht für alle möglichen Permutationen der Linien; die Zahlen unter den Graphen sind die Anzahl der möglichen Permutationen.

xxx) Durchgestrichene Indizes sind auszulassen.

$$\text{mit } F_{kelm} = \int F(x_1, x_2, x_3; \varphi_{ke}(x_1) \varphi_e(x_2) \varphi_m(x_3)) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\text{und } \hat{F}_k = \int F(x_1, x, x) \varphi_k(x_1) dx_1 dx$$

Durch Verwendung dieses Ergebnisses könnten wir jetzt auch eine Matrixdarstellung für den Operator W in (4.6) ableiten; wir wollen jedoch hier darauf verzichten, da das Prinzip mit dem obigen Beispiel klar geworden sein dürfte, und wir keine Rechnungen in dieser einzeitigen Form durchgeführt haben. Wir wenden uns stattdessen der mehrzeitigen, explizit kovarianten Formulierung zu. Für diese wird das auftretende Gleichungssystem wesentlich einfacher, da das Funktional $T(f)$ nur von einer Variablen abhängt.

III. Mehrzeitige Formulierung

6. Die Reihenentwicklung

Wir gehen aus von dem erzeugenden Funktional der zeitgeordneten Produkte

$$\begin{aligned} T_{ab}(f) &= \langle a | T e^{i\varphi(f)} | b \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \langle a | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | b \rangle f(x_1) \dots f(x_n) d^{k_n} x \end{aligned} \quad (6.1)$$

Wir wählen das T-Produkt deswegen, weil es symmetrisch ist in allen Argumenten und weil $T_{ab}(f)$ im Falle einer lokalen Wechselwirkung einer einfachen Differentialgleichung genügt. Um das in Kap. 5 angegebene Entwicklungsverfahren auf $T_{ab}(f)$ anwenden zu können, wäre es natürlich wünschenswert, wenn es in irgendeinem Sinne quadratintegrabel wäre. Geht man wie im

einzeitigen Fall vor und spaltet von $T_{ab}(f)$ einen Faktor $e^{-\frac{1}{2}(f, \Delta_F f)}$ ab, ($\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$), so erhält man auf natürliche Weise die Gaußdichte

$$\delta g(f) = | e^{-\frac{1}{2}(f, \Delta_F f)} |^2 \delta f = e^{-\operatorname{Re}(f, \Delta_F f)} \delta f$$

Setzt man $(f, g)_1 = 2\operatorname{Re}(f, \Delta_F g)$, so sieht man, daß $(\cdot, \cdot)_1$ eine positiv-definite symmetrische Bilinearform ist, also ein Skalarprodukt definiert. Es gilt im Impulsraum

$$(f, g)_1 = \int \tilde{f}(k) \overline{\tilde{g}(-k)} f(k^2) d^4 k \quad (6.2)$$

wobei $f(s)$ die Spektraldichte in der Lehmann-Källén-Darstellung von

$\tilde{\Delta}_F(k) = \int_0^\infty f(s) \tilde{\Delta}_F(k; s) ds$ ist ($\tilde{\Delta}_F(k; s) = \frac{i}{k^2 - s + i\varepsilon}$). Es wäre nun naheliegend für $\Phi_{ab}(f) = T_{ab}(f) e^{-\frac{1}{2}(f, \Delta_F f)}$, die Randbedingung $\int |\Phi_{ab}(f)|^2 \delta g(f) < \infty$ zu fordern. Für das freie Feld mit

$\rho(s) = \delta(s - m^2)$ führt das tatsächlich zu einer sinnvollen Normierung, z.B. gilt für $|a\rangle = |0\rangle$ und $|b\rangle = : \varphi(q_1) \dots \varphi(q_n) : |0\rangle$

$$\int |\Phi_{ab}(f)|^2 \delta g(f) = c(n) \langle 0 | b \rangle \text{ mit } c(n) = \frac{2n!}{(n!)^2 2^{2n}} \quad (6.3)$$

Leider zeigt sich jedoch im Falle eines wechselwirkenden Feldes (bzw. schon beim anharmonischen Oszillator), daß diese Randbedingung im allgemeinen nicht erfüllbar ist. Trotzdem werden wir $T_{ab}(f)$ in die zu $(\cdot, \cdot)_1$ gehörigen hermiteschen Orthogonalfunktionale entwickeln, da eine derartige Entwicklung zumindest "punktweise" durchaus sinnvoll erscheint und wir wegen der Rekursionsformeln (5.8) den Hilbertraumformalismus nicht benötigen. Allerdings berauben wir uns dadurch auch der in Abschnitt 4 gegebenen mathematischen Begründung unseres Vorgehens, so daß das Folgende nur als ein Versuch angesehen werden kann, eine Alternative zur

MTD-Methode zu finden, die wenigstens in einem trivialen Fall (einzeitiger anharmonischer Oszillator) ein konvergentes Verfahren liefert. Wir werden ferner eine lokale Form der Wechselwirkung annehmen, da man nur dann eine einfache Differentialgleichung für $T(f)$ erhält^{x)}. Natürlich setzt das eine geeignete Regularisierung der auftretenden Distributionen voraus¹⁸⁾.

Für die φ^4 -Theorie erhalten wir die Gleichung

$$\left(g, \square \frac{1}{i} \frac{\delta T}{\delta f}\right) + \lambda \left(g, \frac{1}{i^3} \frac{\delta^3 T}{\delta f^3}\right) - \rho_0(g, f) T = 0 \quad \text{xx)} \quad (6.4)$$

(wobei $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2$) für alle g aus einem geeigneten, lorentzinvarianten Testfunktionenraum (z.B. $S(\mathbb{R}^4)$). Nun entwickeln wir $T(f)$ nach hermiteschen Orthogonalfunctionalen bezüglich der Bilinearform $(f, g)_F = (f, 2Fg)$ mit $F = \Delta_F$ und mit $\alpha_k(x) = e^{ikx}$ ($kx = k^0 x^0 - \vec{k}\vec{x}$). Diese Wahl der $\alpha_k(x)$ ist insofern berechtigt, als wir den Hilbertraumformalismus aufgegeben haben und die resultierenden Gleichungen sinnvoll sind, wenn sich die auftretenden Distributionen fouriertransformieren lassen, was wir annehmen wollen. Die $\alpha_k(x)$ sind nicht normiert bezüglich $(\dots)_F$, das führt zu etwas modifizierten Orthogonalitätsrelationen für die $D\varphi_r$

$$(D\varphi_r(k_1 \dots k_r), D\varphi_s(k'_1 \dots k'_s))_H = \delta_{rs} (k_1 \dots k_r | k'_1 \dots k'_s) 2^r \tilde{F}(k_1) \dots \tilde{F}(k_r)$$

mit $\tilde{F}(k) = \int e^{ikx} F(x) dx$

Mit dieser Definition der $\alpha_k(x)$ vermeidet man das Auftreten von Gliedern mit $\sqrt{F}$ in den nachfolgenden Gleichungen. Die Entwicklung von

x) Falls man die Wechselwirkung nur räumlich ausschmiert, geht die Lorentzinvarianz verloren.

xx) Es ist zu beachten, daß $\frac{\delta}{\delta f}$ hierbei auf die Bilinearform $(f, g) = \int f(x)g(x)dx$ bezogen ist und nicht auf die nachfolgend auftretende $(\dots)_F$. Die Umrechnung lautet $\frac{\delta}{\delta f} = 2F \frac{\delta}{\delta f_F}$ falls $(a, \frac{\delta}{\delta f_F})_F (b)_F = (a, b)_F$

$$T(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(k_1 \dots k_r)} t_r(k_1 \dots k_r) D^{\alpha_r} (k_1 \dots k_r; f)$$

ergibt das Gleichungssystem (siehe auch (5.16))

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{r+1}} \sum_{p \in m} \int e^{-ikx} \tilde{G}_r(k) t_{r+1}(p_1 \dots p_1, k_1 \dots p_r) d\tilde{k} - \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r e^{ipx} \\ &\cdot \tilde{G}_2(p_i) t_{r-1}(p_1 \dots p_{i-1}, \dots p_r) - \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{(r+1)(r+2)(r+3)}} \sum_{p \in m} \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \tilde{F}(k_3) e^{-ix(k_1+k_2+k_3)} \right. \\ &t_{r+3}(p_1 \dots p_1, k_1, k_2, k_3, \dots p_r) d\tilde{k}_1 \dots d\tilde{k}_3 - \frac{3}{2r\sqrt{r+1}} \sum_{i,j \in m} \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) e^{-ix(k_1+k_2-p_i)} \\ &t_{r+1}(p_1 \dots p_{i-1}, k_1, k_2, p_i, \dots p_r) d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \\ &+ \frac{3}{4(r-1)\sqrt{r}} \sum_{i,j \in m} \int \tilde{F}(k) e^{-ix(k-p_i-p_j)} t_{r-1}(p_1 \dots p_{i-1}, p_j, \dots p_r) d\tilde{k} \\ &\left. - \frac{1}{8\sqrt{r(r-1)(r-2)}} \sum_{i+j+k} e^{ix(p_i+p_j+p_k)} t_{r-3}(p_1 \dots p_{i-1}, p_j, \dots p_k, \dots p_r) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

mit

$$\tilde{G}_1(k) = -\frac{1}{2} k^2 \tilde{F}(k) - \frac{i}{2} p_0 + \frac{3}{4} \lambda F(0) \tilde{F}(k)$$

$$\tilde{G}_2(k) = -\frac{1}{4} k^2 + \frac{i}{4} p_0 \cdot \frac{1}{\tilde{F}(k)} + \frac{3}{8} \lambda F(0)$$

$$\text{und } \tilde{F}(k) = \int e^{ikx} F(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \tilde{G}_0(k) = \int e^{ikx} G_0(x) dx =$$

$$= \frac{-1}{k^2 + i\varepsilon} ; \quad d\tilde{k} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} dk_0 d^n k \quad (n \text{ ist die Anzahl der Raumkoordinaten}).$$

Den zu $F(0)$ proportionalen Term kann man durch Wickordnung ⁶⁾ der φ^4 -Wechselwirkung eliminieren. Allerdings scheint es so zu sein, daß eine Regularisierung der Theorie, bei der alle in den tiefsten Näherungen auftretenden Integrale existieren, automatisch einen endlichen Wert für $F(0)$ ergeben.

In graphischer Schreibweise lautet Gleichung (6.5)

7. Mehrzeitige Behandlung des anharmonischen Oszillators.

Als Illustration wollen wir die in 6. abgeleiteten Gleichungen für den anharmonischen Oszillator in den tiefsten Näherungen lösen. Da in diesem Falle keine Divergenzprobleme auftreten, bestehen die Schwierigkeiten nur in der Lösung der auftretenden Integralgleichungen. Als erste Approximation wählen wir $\tilde{F}(k) = \frac{i}{k^2 - \omega_0^2 + i\varepsilon}$, dann ergeben sich die Gleichungen:

$$r = 0 \quad \tilde{G}_1(k) t_1(k) = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda \int \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \tilde{F}(k_3) \cdot t_3(k_1, k_2, k_3) \tilde{d}k_1 \dots \tilde{d}k_3$$

$$r = 1 \quad \sqrt{2} \tilde{G}_1(k) t_2(k, p) = \delta(k + p) \tilde{G}_2(p) t_0 + \\ + \frac{\lambda}{2} \left[\sqrt{24} 2\pi \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \tilde{F}(k_3) \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) t_4(k_1, k_2, k_3, p) \tilde{d}k_1 \dots \tilde{d}k_3 \right. \\ \left. - \frac{3}{\sqrt{2}} 2\pi \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \delta(k + p - k_1 - k_2) t_2(k_1, k_2) \tilde{d}k_1 \tilde{d}k_2 \right]$$

$$r = 2 \quad \sqrt{3} \tilde{G}_1(k) t_3(k, p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\delta(k + p_1) \tilde{G}_2(p_1) t_1(p_1) + \right. \\ \left. + \delta(k + p_2) \tilde{G}_2(p_2) t_1(p_2) \right] + \frac{\lambda}{2} \left[\sqrt{60} 2\pi \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \tilde{F}(k_3) \cdot \right. \\ \left. \cdot \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) t_5(k_1, k_2, k_3, p_1, p_2) \tilde{d}k_1 \dots \tilde{d}k_3 - \right. \\ \left. - \frac{3\sqrt{5}}{2} 2\pi \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \delta(k + p_1 - k_1 - k_2) t_2(k_1, k_2, p_1) \tilde{d}k_1 \tilde{d}k_2 - \right. \\ \left. - \frac{3\sqrt{3}}{2} 2\pi \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(k_2) \delta(k + p_2 - k_1 - k_2) t_3(k_1, k_2, p_2) \tilde{d}k_1 \tilde{d}k_2 + \right. \\ \left. + \frac{3\sqrt{2}}{4} \tilde{F}(k + p_1 + p_2) t_1(k + p_1 + p_2) \right]$$

1. Näherung: Wir setzen $t_3 \equiv 0$ und $t_1(k) = \delta(\omega_1 - k) t_1$, dann ergibt sich $\tilde{G}_1(\omega_1) = 0$ $\omega_1^3 = \frac{3\lambda}{4}$, wobei $F(0) = \frac{1}{2\omega_1}$ verwendet wurde; für $\lambda = 1$ ergibt sich $\omega_1 \approx 0,91$ (exakter Wert: $\omega_1 = 1,087$).

Diese Approximation ist in gewisser Weise selbstkonsistent: vergleicht man die Entwicklung von $T(f)$ nach den $D\alpha_v(f)$ mit der nach Potenzen von f , also mit der Entwicklung nach T-Produkten und fordert, daß die aus der Gleichung für $r = 1$ berechnete 2-Punktfunktion mit der anfangs vorgegebenen identisch sein soll (d.h. $t_2(k, p) = 0$), so erhält man $\tilde{G}_2(k) = 0$, und das bedeutet

$$\tilde{F}(k) = \frac{1}{k^2 - \frac{3\lambda}{2} F(0)} \quad \text{d.h.} \quad \omega_1^2 = \frac{3\lambda}{2} F(0) > \omega_1^3 = \frac{3\lambda}{4}$$

also denselben Wert wie oben.

Aus der Gleichung $r = 1$ ergibt sich für den tiefsten Eigenwert zu gerader Parität: (wir setzen $t_2(k, p) = \delta(\omega_2 - k - p) t_2'(k)$)

$$\sqrt{2} \tilde{G}_1(k) t_2'(k) = - \frac{3\lambda}{\lambda \sqrt{2}} \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(\omega_2 - k_1) t_2'(k_1) d\tilde{k}_1$$

Wählen wir $\tilde{F}(k)$ wie oben und setzen $\alpha(\omega_2) := \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(\omega_2 - k_1) t_2'(k_1) d\tilde{k}_1$, so erhalten wir $t_2'(k) = - \frac{3\lambda i}{4} \alpha(\omega_2)$ und somit

$$\alpha(\omega_2) = - \frac{3\lambda i}{4} \int \tilde{F}(k_1) \tilde{F}(\omega_2 - k_1) d\tilde{k}_1 \alpha(\omega_2)$$

$$> \omega_2^2 = 5\omega_1^2 \quad \text{d.h.} \quad \omega_2 = \sqrt{5} \omega_1 \approx 2,24 \quad \text{für } \lambda = 1$$

(exakter Wert: $\omega_2 = 2,538$)

2. Näherung für ω_1 :

Man kann nun versuchen, die Gleichung für $r = 2$ zur Berechnung von ω_1 heranzuziehen. Eine strenge Lösung des gekoppelten Systems ist analytisch nicht unmittelbar möglich. Man kann jedoch als weitere Näherung in der Gleichung $r = 2$ nur den zu t_1 proportionalen Anteil verwenden oder

aber eine "Polapproximation" ¹⁹⁾ für die Integralgleichung für t_3 ansetzen ^{x)}
Beide Verfahren bewirken nur eine Änderung von etwa einigen Prozent im Wert
von ω_4 gegenüber der 1. Näherung. Vergleicht man diese Ergebnisse mit den
entsprechenden bei Anwendung der NTD-Methode, so fällt auf, daß die hier
auftretenden immer unter dem richtigen Wert liegen, wogegen die NTD-Werte
immer zu groß sind.

8. Schlußbemerkung

Der hier unternommene Versuch, eine mathematisch saubere Grundlage für
feldtheoretische Approximationsmethoden, bei denen ein unendliches Gleichungssystem für Korrelationsfunktionen in irgendeiner Weise abgebrochen wird, zu formulieren, ist insofern unbefriedigend, als nur für eine einzeitige Behandlung eine geeignete Topologie im Raum der charakteristischen Funktionale angegeben werden konnte. Für relativistische Systeme weist diese einzeitige Form schwerwiegende Nachteile auf, sofern sie überhaupt möglich ist. Es wäre daher nötig, die Eigenschaften von Differentialoperatoren in allgemeineren linearen topologischen Räumen als dem Hilbertraum zu studieren. (Obwohl nicht einmal für den Hilbertraum mathematische Untersuchungen über Differentialgleichungen des hier auftretenden Typs existieren).

Eine wesentliche Verbesserung des vorgeschlagenen Näherungsverfahrens würde sicher erreicht, wenn man nicht nach Orthogonalfunktionalen zu dem approximativen Vakuumfunktional $e^{-\frac{1}{2}(\phi, \Delta \phi)}$ entwickeln würde, sondern nach denen, die zu dem exakten Vakuumfunktional gehören. Das setzt allerdings eine gleichzeitige Behandlung der Vakuum Erwartungswerte voraus, was nichtlineare Gleichungssysteme mit sich bringt. Allerdings ist es denkbar,

x) Man sieht, daß in der Gleichung $r = 2$ zweimal der Eigenwertkern der Gleichung für $r = 1$ auftritt.

daß die vollkommen auskontrahierten Funktionale

$$Z_{ab}(f) = T_{ab}(f) / T_{vak}(f)$$

quadratintegrabel bezüglich einem mit $|T_{vak}(f)|^2$
definierten Integral sind.

Herrn Prof. Dr. H. Stumpf bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit
und für häufigen Gedankenaustausch zu Dank verpflichtet. Außerdem
möchte ich Herrn Dr. M. Rinke und Herrn Dr. J. Benecke für anregende
Diskussionen danken. Der Max-Planck-Gesellschaft möchte ich für die
Gewährung eines Stipendiums meinen Dank aussprechen.
Schließlich möchte ich meiner Mutter danken, die nur durch große
persönliche Opfer mein Studium ermöglichen konnte.

Anhang 1

Definition der Funktionalableitung ¹³⁾²⁰⁾.

Eine reelle Funktion im R^1 , die in einer Umgebung von 0 definiert ist, heißt $o(t)$, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} o(t)/t = 0$ gilt. Sei $\mathcal{T}$ ein topologischer Vektorraum über R^1 ; eine Abbildung φ von $\mathcal{T}$ in R^1 heißt tangential zu 0, wenn es zu jeder Umgebung W von 0 in R^1 eine Umgebung V von 0 in $\mathcal{T}$ gibt mit

$$\varphi(tV) \subset o(t)W$$

mit einer Funktion $o(t)$. Sei nun U offen in $\mathcal{T}$ und $F: U \rightarrow R^1$ stetig, dann heißt F differenzierbar beim Punkt $f_0 \in U$, wenn es eine lineare Abbildung L von $\mathcal{T}$ in R^1 gibt, so daß die Funktion

$$\varphi(a) = F(f_0 + a) - F(f_0) - L(a) \quad , \quad a \in U - f_0$$

tangential zu 0 ist. L ist eindeutig bestimmt und heißt die Ableitung von F an der Stelle f_0 und wird mit $DF(f_0)$ bezeichnet. $DF(f_0)$ ist für festes f_0 eine lineare Abbildung von $\mathcal{T}$ in R^1 . $L(a)$ heißt die Richtungsableitung von F in Richtung a an der Stelle f_0 und wird mit $D_a F(f_0)$ bezeichnet. ($D_a F$ wird hier als Abbildung von $U \subset \mathcal{T} \rightarrow R^1$ betrachtet).

Anhang 2

Die Selbstadjungiertheit von $W = \frac{1}{i} (f, \frac{\partial}{\partial g}) + \frac{1}{i} (g, (\nabla^2 u) \frac{\partial}{\partial f})$
in $L^2(H, df)$.

Wir gehen zuerst von $\frac{\partial}{\partial f}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial g}$ über zu den Operatoren
 $\frac{\partial}{\partial f_c}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial g_D}$ (vergl. (4.13) und Fußnote S. 30), dann lautet
 $W = \frac{1}{i} (f, \frac{\partial}{\partial g_D})_D - (g, \frac{\partial}{\partial f_c})_D$.

Wir wollen nun zeigen, daß das Nelsonsche Kriterium erfüllt ist. Die Symmetrie von W folgt aus (4.12). Sei $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(D)$. Wir bilden

$$D_{rs}(m|n) = D(\alpha_r(m; f), \alpha_s(n; g)) \text{ mit } m = \{m_1, \dots, m_r\}, n = \{n_1, \dots, n_s\}$$

Die endlichen Linearkombinationen $\sum_{s, r=0}^{S, R} \sum_{(m), (n)} s_{rs}(m|n) D_{rs}(m|n)$ bilden ein
dichtes System von Vektoren in $L^2(H, df)$ (vergl. S. 24). Wir wollen zeigen,
daß sie analytisch sind für W . Nach (5.11) gilt

$$W D_{rs}(m|n) = \sqrt{\frac{r+1}{s}} \sum_{i=1}^s D_{r+1, s-1}(m+n_i | n-n_i) - \sqrt{\frac{s+1}{r}} \sum_{i=1}^r D_{r-1, s+1}(m-m_i | n+n_i)$$

*)

Durch Iteration erhält man hieraus

$$W^n D_{rs}(m|n) = \sum_{k_1 \leq n} c(n, r, s, k) \sum_{i, j} D_{r+k, s-k}(M_i, N_j)$$

mit gewissen Koeffizienten $c(n, r, s, k)$ und Teilmengen M_i bzw. N_j der Mächtigkeit $|M_i| = r+k$ bzw. $|N_j| = s-k$ von m und n . Sei $a_k^{(n)}$ die Anzahl der Summanden bei festem k , dann gilt, wenn wir ohne Einschränkung $r \geq s$ annehmen:

$$\sup_k |c(n, r, s, k) a_k^{(n)}| \leq (r+n)^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}} 2^n$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

$$n=1 \quad \text{—}$$

$n-1 \rightarrow n$:

Aus (*) folgt

$$c(n, r, s, k) a_k^{(n)} = c(n-1, r, s, k-1) a_{k-1}^{(n-1)} \sqrt{\frac{r+k}{s-k-1}} |N_j| 2^{n-1} + \\ + c(n-1, r, s, k+1) a_{k+1}^{(n-1)} \sqrt{\frac{s-k}{r+k+1}} |M_j| 2^{n-1} \leq (r+u)^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}} 2^n$$

wobei die Behauptung für $c(n-1, r, s, k)$ vorausgesetzt wurde. Hieraus erhält man die Abschätzung

$$\|W^n D_{rs}(m|n)\| \leq (r+u)^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}} 2^n (2n+1) \quad \text{für } r \geq s$$

Sei nun $S = \sum_{r,s=0}^{R,S} \sum_{(m|n)} s_{rs}(m|n) D_{rs}(m|n)$ mit $R \geq S$ und

$\sigma = \sup |s_{rs}(m|n)|$ eine Summe mit K Summanden, dann gilt

$$\|W^n S\| \leq \sigma \sum_{\substack{r,s \\ (m|n)}} \|W^n D_{rs}(m|n)\| \leq \sigma K (R+u)^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}} 2^n (2n+1)$$

und somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|W^n S\| t^n$ analytisch bei $t = 0$.

Literaturverzeichnis

- 1) D.W. Robinson, in Axiomatic Field Theory ed. by M. Chretien a.S. Deser (Brandeis Summer Inst. in Theor. Physics).
- 2) J.R. Klauder, in Proc. Seminar on Unified Theories of Elem. Particles, Feldafing 1965.
- 3) R.F. Streater, A.S. Wightman, Spin, Statistics and all that, New York 1964.
- 4) F. Bopp, "Statistische Mechanik bei Störung des Zustandes eines phys. Systems durch die Beobachtung", in Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg-Verlag 1961.
E.C. Sudarshan, Brandeis Summer Inst. in Theor. Phys. 1961, Vol. II.
- 5) K. Symanzik, Dissertation 1954, publiziert in Z.f.Naturforschung 9a, 809 (1954).
- 6) J.D. Bjorken a. S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill Book Comp. 1965.
- 7) W. Heisenberg, "Survey on the Present Situation Concerning Unified Theories of Elementary Particles" in Proc.Sem. on Unified Theor. of Elem. Part. 1965.
- 8) K.O. Friedrichs, H.N. Shapiro et al., Seminar Integration of Functionals, New York University 1957.
- 9) F.J. Dyson, Phys.Rev. 90, 994 (1953), 91, 1543 (1953)
W.P. Silin, W.I. Feinberg, Fortschr.d.Phys. 13, 385 (1965).
H. Stumpf, F. Wagner, F. Wahl, Fortschr.d.Phys. 4, 223 (1959).
- 10) C. Schwartz, Annals of Physics 32, 277 (1965).
- 11) D. Maison, H. Stumpf, Z.f.Naturforschg. 21a, 1830 (1966)
- 12) Mikhlin, The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional.
- 13) S. Lang, Introduction to Differentiable Manifolds, New York 1962.
- 14) A.A. Meradudin, G.H. Weiss, J.Math.Phys. 3, 771 (1962).
- 15) L. Gross, in Analysis in Function Space, MIT Press 1963.

- 16) F.A. Berezin, The Method of Second Quantization, New York and London 1966.
- 17) R.H. Cameron, W.T. Martin, Annals of Math. 48, 385 (1947).
- 18) H. Mitter, in Elementary Particle Theories, ed. P. Urban (Schladming Lecture).
- 19) H.P. Dürr, F. Wagner, Nuovo Cimento 46, 223 (1966).
- 20) A. Fröhlicher, W. Bucher, Calculus in Vector Spaces without Norm, Lecture Notes in Math., Springer 1966.
- 21) E. Nelson, Annals of Math. 70, 572 (1959).
- 22) K. Yosida, Functional Analysis, Springer 1965.
- 23) H. Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer 1956
M. Loève, Probability Theory, New York 1955
P.R. Halmos, Measure Theory, New York 1950
U. Grenander, Probabilities in Algebraic Structures, Stockholm 1963.
J.M. Gelfand, N.J. Wilenkin, Verallgemeinerte Funktionen IV, Berlin 1964.
- 24) N. Wiener, Nonlinear Problems in Random Theory, New York 1958.
- 25) T. Imamura, W.C. Meecham, A. Siegel, J.Math.Phys. 6, 695 (1965).
- 26) W. Magnus, F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der math. Physik, Springer 1948.

Lebenslauf

Am 28. Dezember 1939 wurde ich als Sohn des Diplom-Kaufmanns Johann Maison und seiner Frau Katharina, geb. Harzenetter, in München geboren. Von 1946 - 1950 besuchte ich die Volksschule, anschließend die Klenze-Oberrealschule in München.

Am 31. Januar 1951 starb mein Vater. Im Juli 1959 legte ich die Reifeprüfung ab und begann im Wintersemester 1959/60 an der Universität München Mathematik und Physik zu studieren. Dort legte ich auch im Februar 1962 die Diplom-Vorprüfung in Physik ab. Anschließend fertigte ich bei Herrn Prof. Dr. F. Bopp in einer experimentellen Gruppe, die sich mit der Herstellung polarisierter Elektronenstrahlen befaßte, unter der Leitung von Herrn Dr. H. Chr. Siegmann eine Diplomarbeit an mit dem Thema: "Die lichtelektrische Ionisation eines Kalium-Atomstrahls". Die Diplom-Hauptprüfung in Physik legte ich im Januar 1965 ab.

Seit Mai 1965 arbeite ich als Doktorand am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik bei Herrn Prof. Dr. H. Stumpf, wo ich seit September 1966 als wissenschaftlicher Angestellter beschäftigt bin.

Seit November 1966 bin ich mit Doris Maison, geb. Lederer verheiratet.

